ДИНАМИКА ЭЛЕКТРОНОВ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ПРИСУТСТВИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

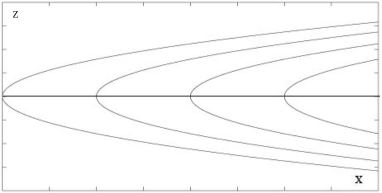
Д.Л.Вайнштейн, А.А.Васильев, А.И.Нейштадт

ИКИ РАН

"Физика плазмы в Солнечной системе",
ИКИ РАН, 11 февраля 2010 г.

1. Постановка задачи
2. Невозмущенное движение
3. Влияние электростатической волны
4. Динамика вблизи резонанса

Постановка задачи



Электрон в параболическом магнитном поле:

$$\mathbf{B} = B_0 \frac{z}{L} \mathbf{e}_x + B_n \mathbf{e}_z.$$

Малый параметр $\varepsilon = R_0/L$

Характерные масштабы движения:

- Ларморовское вращение (~ 1) – магнитный момент I
- Колебания между магнитными пробками ($\sim \varepsilon$) – продольный адиабатический инвариант $I_{\|}$

Возмущение: электростатическая волна $\sim \sin(\mathbf{kq} - \omega t)$

Замены переменных

Исходные переменные: $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2, \hat{q}_3)$ и $\hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$.
Замены переменных ($\beta = B_n/B_0$):

- Обезразмеривание

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}\frac{1}{m\omega_0 R_0}, \quad \mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}\frac{1}{L}, \quad t = \hat{t}\omega_0,$$

- Выбор силовых линий в качестве линий уровня координат x_1, x_2

$$x_1 = -\beta q_1 + q_3^2/2, \quad x_2 = q_2, \quad x_3 = q_3$$

$$p_1 = -\beta P_1, \quad p_2 = P_2, \quad p_3 = P_3 + P_1 x_3$$

- Преобразование ведущего центра

$$x_1 = Q_1 + \varepsilon P_2, \quad x_2 = Q_2 - \varepsilon P_1, \quad x_3 = Q_3$$

Гамильтониан невозмущенной системы 1

Перенормировка энергии: $H_0 \to H_0/(m\omega_0^2 R_0^2)$. Гамильтониан в новых переменных принимает вид:

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(P_1^2(\beta^2 + Q_3^2) + P_2^2 + 2P_1P_3Q_3 + P_3^2\right)$$

Канонически сопряженными парами переменных являются $(P_2, P_1), (\varepsilon^{-1}Q_3, P_3)$.

- (P_2, P_1) меняются со скоростью порядка 1 (ларморовское движение)
- (Q_3, P_3) меняются со скоростью порядка ε (дрейф вдоль силовой линии поля)

Гамильтониан невозмущенной системы 2

"Действие"линейной системы для P_2, P_1 при фиксированных Q_3, P_3:

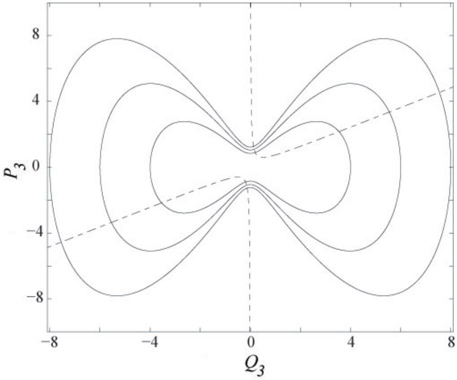
$$I = \frac{1}{2}((P_1 - P_{eq})^2\omega_l + P_2^2/\omega_l),$$

$$\text{где} \quad P_{eq} = -P_3Q_3/(\beta^2 + Q_3^2), \quad \omega_l = \sqrt{\beta^2 + Q_3^2}$$

В адиабатическом приближении величина I постоянна вдоль траектории системы (сохранение магнитного момента). Поведение переменных $P_3,\ Q_3$ описывается системой с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(2\omega_l I + \frac{P_3^2\beta^2}{\beta^2 + Q_3^2}\right)$$

Фазовый портрет невозмущенной системы



Продольный адиабатический инвариант $I_{\parallel} \equiv \oint v_{\parallel} dl$ равен площади, ограниченной фазовой траекторией на этом портрете.

Плоская электростатическая волна

$$\hat{\Phi} = \frac{E_0}{|\hat{\mathbf{k}}|} \sin\left[(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{q}}) - \hat{\omega}\hat{t}\right]$$

Будем предполагать, что

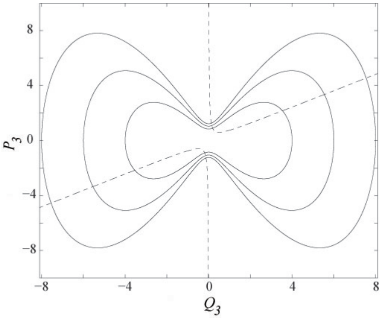
$$\omega_b \ll \hat{\omega} \ll \omega_0,$$

где $\omega_b \sim \varepsilon\omega_0$ – характерная частота колебаний между магнитными пробками. Гамильтониан после замен переменных и усреднения по P_1, P_2:

$$H = \omega_l I + \frac{P_3^2\beta^2}{2(\beta^2 + Q_3^2)} + \lambda \sin\left(\frac{k_1}{\varepsilon\beta}\left(\frac{Q_3^2}{2} - Q_1\right) + \frac{k_3 Q_3}{\varepsilon} - \omega t\right),$$

где $k = \hat{k}R_0$, $\lambda = eE_0/(|\mathbf{k}| m\omega_0^2 R_0)$ предполагается малым.

Резонанс



Производная по времени от фазы волны обращается в ноль при

$$-\omega + \frac{P_3\beta^2}{\beta^2 + Q_3^2}\left(\frac{k_1}{\beta}Q_3 + k_3\right) = 0.$$

Это уравнение гиперболы на плоскости (Q_3, P_3). Вдали от резонанса динамика хорошо описывается системой, усредненной по фазе волны (которая совпадает с невозмущенной системой). Вблизи резонанса такое усреднение не работает.

Физический смысл резонанса: $\bar{v}k - \omega = 0$, где $\bar{v}$ - скорость частицы, усредненная по ларморовскому вращению.

Вид гамильтониана вблизи резонанса

Маятникоподобная система:

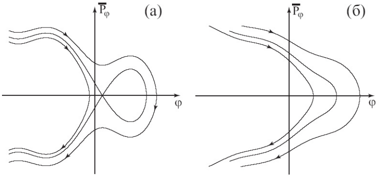
$$H = H_0|_{res} + H_\varphi, \quad H_\varphi = \varepsilon b(Q_3)\varphi + \frac{1}{2}g(Q_3)P_\varphi^2 + \lambda \sin\varphi,$$

где φ - фаза волны, P_φ - канонически сопряженный импульс, b и g - известные функции. Соответствующие уравнения движения:

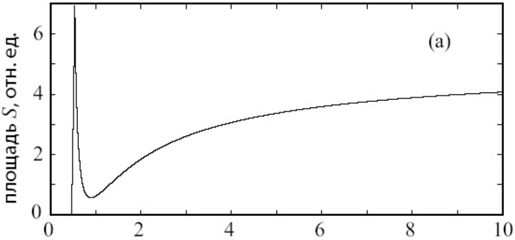
$$\dot{P}_3 = -\varepsilon \frac{\partial H_{res}}{\partial Q_3}, \quad \dot{Q}_3 = \varepsilon \frac{\partial H_{res}}{\partial \tilde{P}_3},$$
$$\dot{P}_\varphi = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H_\varphi}{\partial \bar{P}_\varphi}.$$

Переменные (P_3, Q_3) медленные, а (P_φ, φ) - быстрые.

Фазовые портреты маятникоподобной системы

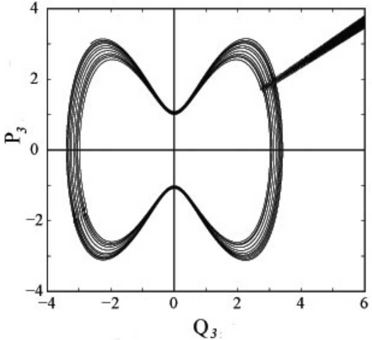


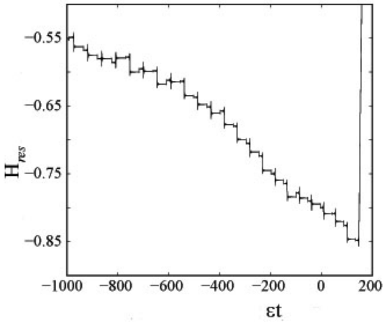
а) $|\varepsilon b| < |\lambda|$, б) $|\varepsilon b| > |\lambda|$.
Площадь колебательной области S зависит от b и g, то есть является функцией точки на резонансной кривой.



Если $k_1 > 0$, то там, где $\partial S/\partial Q_3 > 0$, возможен захват в резонанс. Вероятность захвата мала ($\sim \sqrt{\varepsilon}$).

Рассеяние на резонансе и захват в резонанс





В задаче возможен вечный захват в резонанс. Захваченная частица проходит сквозь магнитную пробку и движется вдоль магнитной силовой линии по направлению к Земле.