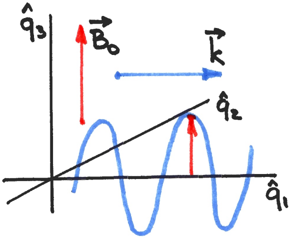
Серфотронное ускорение релятивистской частицы плоской электромагнитной волной

А.А.Васильев, А.И.Нейштадт, А.В.Артемьев
ИКИ РАН

"Физика плазмы в Солнечной системе",
ИКИ РАН, 17 февраля 2011 г.

Постановка задачи



Релятивистская заряженная частица с координатами $\hat{q}_i$, $i = 1, 2, 3$ и импульсом $\hat{p}_i$, $i = 1, 2, 3$ в однородном магнитном поле $\mathbf{B_0}$ и поле ортогонально распространяющейся плоской э-м волны:

$$\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3),$$

$$B_1 = B_2 = 0,\ B_3 = -B_w \sin(\hat{k}\hat{q}_1 - \hat{\omega}\hat{t}) + B_0.$$

Векторный потенциал: $\mathbf{A} = \left(0,\ \ B_0\hat{q}_1 + \frac{B_w}{\hat{k}}\cos(\hat{k}\hat{q}_1 - \hat{\omega}\hat{t}),\ \ 0\right).$

Введем $\mathcal{P}_2 = \hat{p}_2 + \frac{e}{c}B_0\hat{q}_1 + \frac{eB_w}{c\hat{k}}\cos(\hat{k}\hat{q}_1 - \hat{\omega}\hat{t})$

Гамильтониан

Гамильтониан системы:

$$\hat{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\hat{p}_1^2 + \left(c\mathcal{P}_2 - eB_0\hat{q}_1 - \frac{eB_w}{\hat{k}}\cos(\hat{k}\hat{q}_1 - \hat{\omega}\hat{t})\right)^2 + c^2\hat{p}_3^2},$$

пары канонически сопряженных переменных:
$(\hat{p}_1, \hat{q}_1), (\mathcal{P}_2, \hat{q}_2), (\hat{p}_3, \hat{q}_3)$.
Гамильтониан не содержит $\hat{q}_2$ и $\hat{q}_3 \Rightarrow \mathcal{P}_2$, $\hat{p}_3 = \text{const}$. Можно положить $\mathcal{P}_2 = \hat{p}_3 = 0$.

Замены переменных

Введем $\omega_L = eB_0/(mc)$ и $\varepsilon = eB_w/(m\hat{k}c^2)$. Будем считать, что $0 < \varepsilon \ll 1$. Обезразмеривание:

$$p_i = \frac{\hat{p}_i}{mc}, \quad q_i = \frac{\omega_L \hat{q}_i}{c}, \quad t = \frac{\omega_L \hat{t}}{\varepsilon}, \quad H = \frac{\hat{H}}{mc^2}, \quad k = \frac{\hat{k}c\varepsilon}{\omega_L}, \quad \omega = \frac{\hat{\omega}\varepsilon}{\omega_L}.$$

Каноническая замена переменных: $\varphi = \hat{k}\hat{q}_1 - \hat{\omega}\hat{t}$,
$q = q_1$, $p = p_1 - Ik$, пары канонически сопряженных переменных (I, φ) и $(p, \varepsilon^{-1}q)$. Гамильтониан:

$$\mathcal{H} = -\omega I + \sqrt{1 + (p + Ik)^2 + (q + \varepsilon\cos\varphi)^2} = H_0 + \varepsilon H_1,$$

$$H_0 = -\omega I + \sqrt{1 + (p + Ik)^2 + q^2},$$
$$\varepsilon H_1 = \varepsilon \frac{q\cos\varphi}{\sqrt{1 + (p + Ik)^2 + q^2}} + O(\varepsilon^2).$$

Уравнения движения

$$\dot{I} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = \varepsilon \frac{q \sin \varphi}{\sqrt{1 + (p + Ik)^2 + q^2}}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I} = -\omega + \frac{k(p + Ik)}{\sqrt{1 + (p + Ik)^2 + q^2}}$$

$$\dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\varepsilon \frac{q}{\sqrt{1 + (p + Ik)^2 + q^2}}$$

$$\dot{q} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \varepsilon \frac{p + Ik}{\sqrt{1 + (p + Ik)^2 + q^2}}.$$

Переменная φ быстрая, можно по ней усреднить $\rightarrow$ ларморовское вращение в поле $\mathbf{B_0}$.

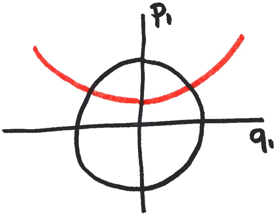
Резонанс: $\dot{\varphi} = 0$. Это условие определяет поверхность в пространстве (p, q, I):

$$(p + Ik)^2 (k^2 - \omega^2) = (1 + q^2)\omega^2.$$

Резонансная кривая

На плоскости (p_1, q_1) резонансное условие определяет резонансную кривую (гиперболу) $p_1^2(k^2 - \omega^2) = (1 + q^2)\omega^2$.

В резонансе $\mathbf{k}\mathbf{v_0} - \omega = 0$, где $\mathbf{v_0}$ - скорость невозмущенного ларморовского движения.

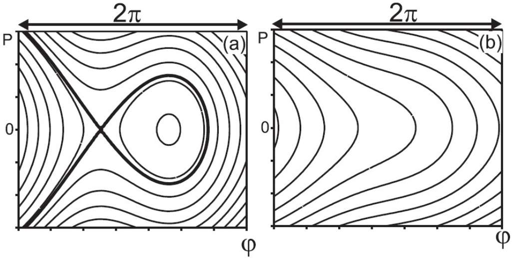


Переменная I - интеграл усредненной системы и адиабатический инвариант точной системы.

Разложение гамильтониана вблизи резонанса

$$\mathcal{H} = \Lambda(p,q) + \frac{1}{2}g(q)K^2 + \varepsilon d(q)\cos\varphi + \varepsilon b(q)\varphi,$$

где $\Lambda(p,q) = H_0|_{I=I_r}$, $K = I - I_r(p,q)$, $I_r(p,q)$ - значение I на резонансе.



(a) $d/b > 1$
(b) $d/b < 1$

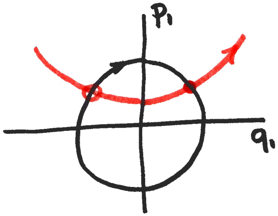
$P = K/\sqrt{\varepsilon}$

$$d/b = k(1 - v_\phi^2) = (B_w/B_0)(1 - \hat{v}_\phi^2/c^2), \quad S = \sqrt{\frac{d}{g}}\,A = \sqrt{\frac{|q|}{k^2-\omega^2}}\,A$$

Захват в резонанс

$$S = \sqrt{\frac{|q|}{k^2 - \omega^2}}\, A$$

Если $v_\phi > 0$, то при $q > 0$ площадь S растет, и возможен (вечный) захват в резонанс.



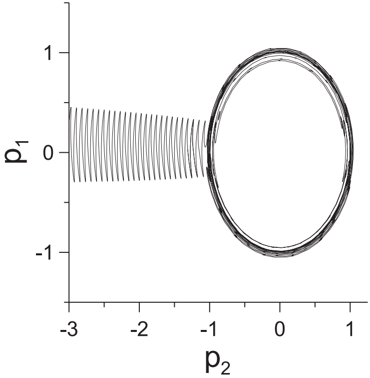
В захваченном движении частица движется в направлении $\hat{q}_1$ вместе с волной: $\hat{q}_1 \sim \hat{v}_\phi \hat{t}$.

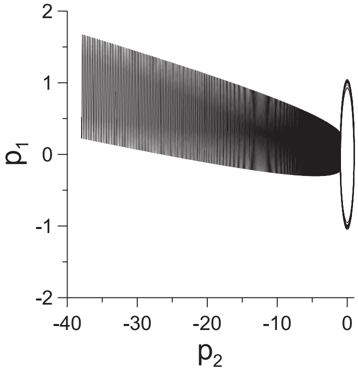
$0 = \mathcal{P}_2 \approx \hat{p}_2 + \frac{e}{c} B_0 \hat{q}_1 \quad \Rightarrow$

$\hat{p}_2 \sim -mc(\omega_L \hat{v}_\phi \hat{t}/c)$ -

неограниченное серфотронное ускорение.

Захват в резонанс - плоскость компонент импульса

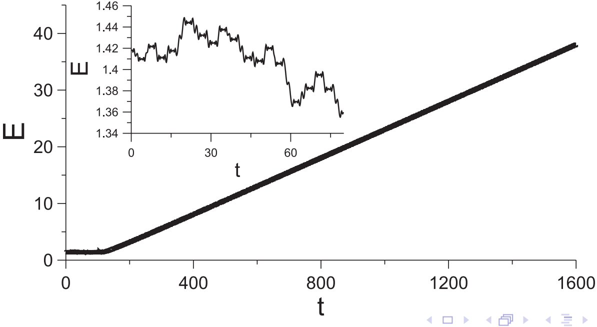




Захват в резонанс - изменение энергии

Кинетическая энергия частицы $E = \sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2}$ растет в захвате линейно:

$$\hat{E} = mc^2 E \sim mc\hat{v}_\phi \omega_L \hat{t} / \sqrt{1 - \hat{v}_\phi^2 / c^2}.$$



Скачок энергии при рассеянии на резонансе

$$E = \sqrt{1 + p_1^2 + q^2} = \sqrt{1 + (p + kI)^2 + q^2}.$$

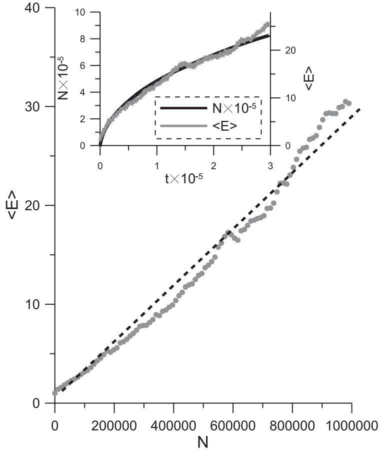
$$\dot{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{H} + \omega I) = \omega \dot{I} = -\omega \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = \varepsilon \omega \, d \sin \varphi.$$

Вдали от резонанса энергия почти постоянна. Чтобы найти ее изменение, надо проинтегрировать $\dot{E}$ вблизи резонанса. Находим:

$$j_E = 2\sqrt{\varepsilon} \frac{v_\phi}{\sqrt{1 - v_\phi^2}} \sqrt{q} \, f(\varphi_*) \sim \sqrt{\varepsilon E}.$$

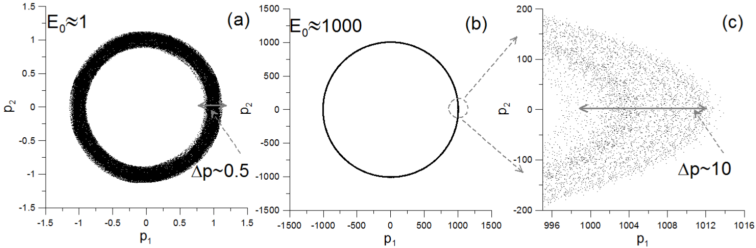
Рост энергии при многократных рассеяниях

Можно показать, что скачки при последовательных прохождениях через резонанс статистически независимы. После N скачков $E \sim \varepsilon N$ или $E \sim \varepsilon\sqrt{t}$.



Энергия ансамбля частиц (10^3 частиц) как фуекция числа прохождений через резонанс при $\varepsilon = 0.1$. Врезка: Число прохождений через резонанс и средняя энергия как функция времени.

Диффузия на плоскости компонент импульса



Сечение Пуанкаре при различных значениях начальной энергии ($\varepsilon = 0.1$). Число прохождений через резонанс 10^6. Видна диффузия энергии.